

# X ENS Math A 2025

Pierre Lorenzon

2026/04/18

- J'ai fait les deux Écoles et ça n'a rien changé !
- Pff tu racontes n'importe quoi y a que Michel Sardine qu'a fait les deux Écoles !
- Ouais mais du coup lui il est libre de faire l'amour et d'aller à la messe !
- Pff encore portnawak y a que Max qu'est libre !

## I Questions préliminaires

1. – Si  $h$  est diagonalisable, son polynôme minimal  $m\mu_H$  est simplement scindé. Or

$$\forall x \in W, \mu_H(h|_W)(x) = \mu_H(h)(x) = 0 ;$$

si bien que  $\mu_h$  est un polynôme annulateur de  $h|_W$ . Ainsi le polynôme minimal de  $h|_W$  divise  $\mu_h$  ; et est donc simplement scindé ; ce qui entraîne que  $h|_W$  est diagonalisable.

## 2 . – Un invariant matriciel

a) Si  $M$  et  $M_0$  sont semblables,

$$\exists P \in \text{GL}_n(\mathbb{C}), M_0 = PMP^{-1} .$$

Il s'ensuit que

$$\forall k \in \mathbb{N}, M_0^k = PM^kP^{-1} ;$$

si bien que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \text{Ker } M_0^k = P\text{Ker } M^k ;$$

si bien que  $P$  représentant un automorphisme

$$\forall k \in \mathbb{N}, \dim(\text{Ker}(M_0^k)) = \dim(\text{Ker}(M^k)) ;$$

ce qui entraîne finalement

$$\forall k \in \mathbb{N}, \delta_k(M) = \delta_k(M_0) .$$

b) Notons  $\mathcal{B} := (e_i)_{1 \leq i \leq r} \in \mathbb{C}^r$  la base canonique de  $\mathbb{C}^r$ . Alors

$$\forall 1 \leq i \leq r-1, J_r e_i = e_{i+1} \text{ et } J_r(e_r) = 0.$$

On en déduit, par une récurrence immédiate, que

$$\begin{aligned} \forall 1 \leq k \leq r, \quad \forall 1 \leq i \leq r-k, J_r^k(e_i) &= e_{i+k} \\ \forall r-k+1 \leq i \leq r, J_r^k(e_i) &= 0. \end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$\forall 1 \leq k \leq r, \text{Ker}(J_r^k) = \text{Vect}\{e_{r-k+1} \dots e_r\};$$

si bien que

$$\forall 1 \leq k \leq r, \dim(\text{Ker}(J_r^k)) = k.$$

On en déduit que,

$$\forall 1 \leq k \leq r-1, \delta_k(J_r) = -(k+1) + 2k - (k-1) = 0.$$

Il s'ensuit que  $J_r^r = 0$  et par conséquent

$$\forall k \in \mathbb{N}, k \geq r \Rightarrow J_r^k = 0;$$

autrement dit

$$\forall k \in \mathbb{N}, k \geq r \Rightarrow \text{Ker}(J_r^k) = \mathbb{C}^r.$$

Ceci entraîne que

$$\forall k \in \mathbb{N}, k > r \Rightarrow \delta_k(J_r) = 0.$$

Enfin :

$$\begin{aligned} \delta_r(J_r) &= -\dim(\text{Ker}(J_r^{r+1})) + 2\dim(\text{Ker}(J_r^r)) - \dim(\text{Ker}(J_r^{r-1})) \\ &= -r + 2r - (r-1) \\ &= 1. \end{aligned}$$

c) Pour tout  $(M, M_1, M_2) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \times \mathcal{M}_{n_1}(\mathbb{C}) \times \mathcal{M}_{n_2}(\mathbb{C})$ , avec  $n = n_1 + n_2$ , l'écriture  $M = \text{diag}(M_1, M_2)$ , correspond à la décomposition en somme directe de  $\mathbb{C}^n = V_1 \oplus V_2$  avec  $V_1 = \text{Vect}\{e_1, \dots, e_{n_1}\}$  et  $V_2 = \text{Vect}\{e_{n_1+1}, \dots, e_n\}$  (où  $(e_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{C}^n$  est la base canonique de  $\mathbb{C}^n$ ). Alors pour tout  $x \in \mathbb{C}^n$  il existe un unique couple  $(x_1, x_2) \in V_1 \times V_2$  tel que  $x = x_1 + x_2$ .

Il s'ensuit que

$$Mx = M_1x_1 + M_2x_2.$$

Alors

$$Mx = 0 \Leftrightarrow M_1x_1 = M_2x_2 = 0;$$

si bien que  $\text{Ker}(M) = \text{Ker}(M_1) \oplus \text{Ker}(M_2)$ ; si bien que

$$\dim(\text{Ker}(M)) = \dim(\text{Ker}(M_1)) + \dim(\text{Ker}(M_2)).$$

Comme de plus,  $\forall k \in \mathbb{N}$ ,  $M^k = \text{diag}(M_1^k, M_2^k)$ , il résulte de ce qui précède que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \delta_k(M) = \delta_k(M_1) + \delta_k(M_2).$$

## II Algèbre linéaire sur les polynômes de Laurent

### 3 . —

a) Pour  $F \in \mathbb{C}[X]$ ,  $\pi(F) = 0$ , donc  $\hat{\xi}(\pi(F)) = 0$ . Comme  $XF \in \mathbb{C}[X]$ ,  $\pi(XF) = 0$ ; si bien que  $\hat{\xi}(F) = 0$ . Donc

$$\forall F \in \mathbb{C}[X], \hat{\xi}(\pi(F)) = \hat{\xi}(F).$$

$$\forall F \in D, \pi(F) = F \Rightarrow \hat{\xi}(\pi(F)) = \hat{\xi}(F).$$

Comme  $\mathbb{C}[X^{\pm 1}] = \mathbb{C}[X] \oplus D$  et que  $\hat{\xi}$  et  $\pi$  sont linéaires, il résulte des deux égalités ci-dessus que

$$\forall F \in \mathbb{C}[X^{\pm 1}], \hat{\xi}(\pi(F)) = \hat{\xi}(F).$$

b) La formule étant linéaire en  $P \in \mathbb{C}[X]$ , et en  $F \in D$ , il suffit de la montrer pour

$$P = X^k, F = X^{-\ell}, (k, \ell) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}.$$

C'est essentiellement immédiat et on a donc

$$P(\xi)(F) = \pi(PF).$$

### 4 . — Image et noyau des puissances de $\xi$

—

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, X^{-k} = \xi^n(X^{-k-n});$$

si bien qu'il existe une base de  $D$  dont chacun des éléments a un antécédent; ce qui prouve, puisque  $\xi$  est linéaire, qu'elle est surjective.

—

$$\begin{aligned} \forall F \in D, & \quad F \in \text{Ker}(\xi^n) \\ \Leftrightarrow & \quad \xi^n(F) = 0 \\ \Leftrightarrow & \quad \pi(X^n F) = 0 \\ \Leftrightarrow & \quad \text{val}(X^n F) \geq 0 \\ \Rightarrow & \quad \text{val}(F) \geq -n \\ \Leftrightarrow & \quad F \in \text{Vect}\{X^{-n}, \dots, X^{-1}\}; \end{aligned}$$

La famille  $X^{-k}, 1 \leq k \leq n$  étant libre, c'est une base de  $\text{Ker}(\xi^n)$ .

### 5 . — Sous-espaces cycliques

— Un sous-espace  $D_r$   $\xi$ -stable et tel que  $X^{-R} \in D_r$ , contient nécessairement  $\xi^n(X^{-r})$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Ceci équivaut à ce qu'il contiennent tous les  $\xi^k(X^{-r})$   $0 \leq k \leq r-1$ , puisque pour  $n \geq r$   $\xi^n(X^{-r}) = 0$ .

Or  $\text{Vect}\{X^{-k}\}, 1 \leq k \leq r$  est évidemment  $\xi$ -stable; et c'est donc le sous-espace  $D_r$  cherché.

— La matrice de  $\xi$  dans la base ci-dessus est le bloc de Jordan<sup>1</sup>  $J_r^2$ .

---

1. Ah non pas l'amant de la princesse bien sûr  
2. Pas non plus le mec avec son chapeau texan.

### III Prolongements compatibles

6. —

a) Tout d'abord  $0(u)(v) = 0 \in W$  ; c'est-à-dire que  $0 \in I$  ; si bien que

$$I \neq \emptyset .$$

Pour tous  $(P, Q) \in I \times I$  et  $(A, B) \in \mathbb{C}[X]$ ,

$$(AP + BQ)(u)(v) = A(u) \circ P(u)(v) + B(u) \circ Q(u)(v) .$$

Or, par hypothèse,  $P(u)(v) \in W$ , et  $Q(u)(v) \in W$ . Par ailleurs, pour tout  $w \in W$ ,  $u(w) \in W$ , ( $W$  est  $u$ -stable.) Par conséquent,  $\forall k \in \mathbb{N}$ ,  $j^k(w) \in W$  ; si bien que,  $W$  étant un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel, pour tout  $R \in \mathbb{C}[X]$ ,  $R(u)(w) \in W$ .

Ainsi

$$A(u)(P(u)(v)) \in W \text{ et } B(u)(Q(u)(v)) \in W ;$$

si bien que

$$A(u) \circ P(u)(v) + B(u) \circ Q(u)(v) \in W ;$$

ce qui prouve que  $(AP + BQ) \in I$  ; et donc que  $I$  est un idéal de  $\mathbb{C}[X]$ .

b) Puisque  $u$  est nilpotent il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $u^n = 0$ . Alors

$$X^n(u)(v) = u^n(v) = 0 \in W ;$$

si bien que  $X^n \in I$ . Il s'ensuit que l'ensemble

$$\{k \in \mathbb{N} ; X^k \in I\} \neq \emptyset .$$

Puisque  $\mathbb{N}$  est bien ordonné, l'ensemble ci-dessus possède un plus petit élément  $r$  ; c'est-à-dire que  $X^r \in I$ .

Or  $\mathbb{C}[X]$  est un anneau principal (théorème des la division euclidienne,) si que

$$\exists \mu \in \mathbb{C}[X], I = \mu \mathbb{C}[X] ;$$

et on peut même supposer  $\mu$  unitaire.

Alors  $\mu | X^r$  ; si bien que  $\mu = X^k$ ,  $k \leq r$ . Or on a défini  $r$  comme le plus petit entier  $\ell$  tel que  $X^\ell \in I$  ; si bien que  $k = r$  ; i.e.  $\mu = X^r$  ; i.e.

$$I = X^r \mathbb{C}[X] .$$

c) —  $\forall w \in W$ ,  $w = 0(u)(v) + w \in W$  ; si bien que

$$W \subset W_0 .$$

—  $v = 1(u)(v) + 0 \in W$ .

—  $\forall (P, w) \in \mathbb{C}[X] \times W$ ,  $u(P(u)(v) + w) = u(P(u)(v)) + u(w) = (XP)(u)(v) + u(w)$ .

Or  $u(w) \in W$  donc

$$u(P(u)(v) + w) \in W .$$

d) On a démontré à la question 4 que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $\xi^n$  est surjectif. Or par définition  $G_v = \phi(u^r(v)) \in D$  ; et possède donc un antécédent  $F_v$  par  $\xi^r$  .

e) Soit  $(P, w) \in \mathbb{C}[X] \times W$  tel que  $P(u)(v) = w$  .

Ceci entraîne, en particulier, que  $P(u)(v) \in W$  ; i.e.  $P \in I$  . Or d'après le point b ,  $X^r|P$  ; si bien qu'il existe  $Q \in \mathbb{C}[X]$  tel que  $P = X^r Q$  .

Alors

$$\begin{aligned} \phi(w) &= \phi(P(u)(v)) \\ &= \phi[Q(u)(u^r(v))] \\ &= Q(-\xi)[\phi(u^r(v))] \\ &= Q(\xi)(\phi(G_v)) \\ &= Q(\xi)(\xi^r(F_v)) \\ &= P(F_v) . \end{aligned}$$

f) Soit  $(P, Q, w, z) \in \mathbb{C}[X] \times \mathbb{C}[X] \times W \times W$  tel que

$$P(u)(v) + w = Q(u)(v) + z \in W .$$

Il en résulte, en particulier, que

$$(P - Q)(u)(v) = P(u)(v) - Q(u)(v) = z - w \in W ;$$

si bien que  $P - Q \in I$  ; et qu'il existe donc  $R \in \mathbb{C}[X]$  tel que

$$Q = P + X^r R \text{ (cf. le point b .)}$$

Alors :

$$\begin{aligned} P(\xi)(F_v) + \phi(w) - Q(\xi)(F_v) - \phi(z) &= R(\xi)(\xi^r(F_v)) + \phi(w - z) \\ &= R(\xi)(G_v) + \phi(w - z) \\ &= R(\xi)[\phi(u^r(v))] + \phi(z - z) \\ &= \phi[R(u)(u^r(v))] + \phi(w - z) \\ &= \phi((X^r R)(u)(v) + w - z) \\ &= \phi(0) \\ &= 0 . \end{aligned}$$

Il est clair que  $\phi_{0|W} = \phi$  . Par ailleurs, par construction

$$\xi \circ \phi_0 = \phi_0 \circ u|_{W_0} .$$

7. – Considérons l'ensemble  $\mathcal{P}$  des sous-espaces couples  $(W, \phi)$  où  $W$  est  $u$ -stable et  $\phi$  compatible i.e.

$$\xi \circ \phi = \phi \circ u|_W .$$

L'ensemble  $\mathcal{P}$  est non vide puisque  $(0, 0) \in \mathcal{P}$  . Considérons  $(W, \phi) \in \mathcal{P}$  tel que  $\dim W$  est maximale.

Si  $W \neq V$ , d'après la question 6, il existe  $(W_0, \phi_0) \in \mathcal{P}$  tel que  $W$  est strictement inclus dans  $W_0$  ; si bien que

$$\dim W_0 > \dim W .$$

Ceci contredit la maximalité de la dimension de  $W$  ; si bien que

$$W = V .$$

#### IV Théorème de décomposition pour les endomorphismes nilpotents

## 8 . – Scindage d'un sous-espace cyclique maximal

- a) — Puisque  $u^{n-1}(v_0) \neq 0$ ,  
 — d'une part la famille constituée du seul élément  $u^{n-1}(v_0)$  est libre ;  
 — d'autre part

$$\forall 0 \leq i \leq n-1, u^i(v_0) \neq 0 .$$

Soit  $0 \leq k \leq n-1$  et supposons que la famille  $(u^{n-1-k}(v_0), \dots, u^{n-1}(v_0))$  est libre. Nous venons de remarquer que c'est le cas pour  $k = 0$ . Soit  $(a_i)_{0 \leq i \leq k+1} \in \mathbb{C}$  tel que

$$\sum_{i=0}^{k+1} a_i u^{n-1-i}(v_0) = 0 .$$

Alors :

$$\begin{aligned} 0 &= u\left(\sum_{i=0}^{k+1} a_i u^{n-1-i}(v_0)\right) \\ &= \sum_{i=0}^{k+1} a_i u^{n-i}(v_0) \\ &= \sum_{i=1}^{k+1} a_i u^{n-i}(v_0) ; \end{aligned}$$

ce qui entraîne, sous l'hypothèse que nous avons faite, que

$$\forall 1 \leq i \leq k+1, a_i = 0 .$$

Il s'ensuit que  $a_0 u^{n-k-1}(v_0) = 0$  ; ce qui entraîne, puisque  $u^{n-k-1}(v_0) \neq 0$ ,  $a_0 = 0$  ; et donc finalement que la famille  $(u^{n-k-1}(v_0), \dots, u^{n-1}(v_0))$  est libre ; et finalement par récurrence que la famille

$$\mathcal{B} := (v_0, \dots, u^{n-1}(v_0)) \text{ est libre .}$$

— Comme

$$\forall 0 \leq i \leq n-2, u(u^i(v_0)) = u^{i+1}(v_0) \in W \text{ et } u(u^{n-1}(v_0)) = u^n(v_0) = 0 \in W ,$$

$W$  est  $u$ -stable.

- $v_0$  appartient, pour ainsi dire tautologiquement à  $W$ .  
 — Enfin les remarques faites précédemment montrent que la matrice de  $u$  dans la base  $u^i(v_0), 0 \leq i \leq n-1$  est le bloc de Jordan<sup>3</sup>  $J_n$  .

- b) — Puisque  $\mathcal{B}$  est une base de  $W$ , il existe une unique application linéaire

$$\phi : W \rightarrow D, u^i(v_0) \mapsto X^{n-n+i}, 0 \leq i \leq n-1 .$$

— La famille  $X^{-n+i}, 0 \leq i \leq n-1$  étant libre dans  $D$ ,  $\phi$  est injective.

---

3. Pas l'amant de la princesse bien sûr !

$$\begin{aligned}
\forall 0 \leq i \leq n-2, \quad \phi[u(u^i(v_0))] &= \phi(u^{i+1}(v_0)) \\
&= X^{n-i+1} \\
&= X \cdot X^{-n+i} \\
&= \xi(X^{-n+i}) \\
&= \xi[\phi(u^i(v_0))] .
\end{aligned}$$

De plus

$$\begin{aligned}
\phi[u(u^{n-1}(v_0))] &= \phi(u^n(v_0)) \\
&= \phi(0) \\
&= 0 \\
&= \xi(X^{-1}) \\
&= \xi[\phi(u^{n-1}(v_0))] .
\end{aligned}$$

On a donc montré, puisque  $\mathcal{B}$  est une base<sup>4</sup> que

$$\xi \circ \phi = \phi \circ u|_W .$$

c) Puisque  $\psi$  est compatible

$$\begin{aligned}
\forall v \in V, \quad \xi^n(\psi(v)) \\
&= \psi(u^n(v)) \\
&= 0 ;
\end{aligned}$$

c'est-à-dire que

$$\text{Im } \psi \subset \text{Ker}(\xi^n) .$$

d) — Puisque  $\psi|_W = \phi$ , pour tout  $w \in W \cap \text{Ker } \psi$ ,  $w \in \text{Ker } \phi$ . Or  $\phi$  est injective, donc

$$W \cap \text{Ker } \psi = 0 .$$

— Par ailleurs

$$\begin{aligned}
&\text{Im } \psi \subset \text{Ker}(\xi^n) \\
\Rightarrow \dim(\text{Im } \psi) &\leq \dim(\text{Ker}(\xi^n)) \\
&\leq \dim(\text{Vect}\{X^{-i}\}, 1 \leq i \leq n) \\
&\leq n \\
\Rightarrow \dim(\text{Ker } \psi) &\geq \dim V - n \\
&\geq \dim V - \dim W ;
\end{aligned}$$

ce qui prouve que

$$V = W \oplus \text{Ker } \psi .$$

— Enfin

$$\begin{aligned}
\forall v \in \text{Ker } \psi, \quad \psi(u(v)) &= \xi(\psi(v)) \\
&= \xi(0) \\
&= 0 ;
\end{aligned}$$

ce qui prouve que  $\text{Ker } \psi$  est  $u$ -stable.

---

4. L'hypothèse que  $\mathcal{B}$  est génératrice suffirait.

## 9 . – Théorème de décomposition : existence

Raisonnons par récurrence sur la dimension  $d$  de  $V$ .

Pour  $d = 0$  le résultat est trivial.

Soit  $d \in \mathbb{N}$  et supposons le résultat établi pour tout  $(V, u)$  avec  $\dim V \leq d$  et  $u$  nilpotent.

Soit  $V$  de dimension  $d + 1$  et  $u$  un endomorphisme de  $V$  nilpotent d'indice  $n \in \mathbb{N}$ .

Comme  $V \neq 0$ , on peut construire un sous-espace  $W$  et une application  $\psi$  comme à la question 8. Alors  $V = W \oplus \text{Ker } \psi$ . Comme  $v_0 \neq 0$ ,  $\dim W \geq 1$ ; si bien que

$$\dim(\text{Ker } \psi) \leq d.$$

On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence à  $(\text{Ker } \psi, u|_{\text{Ker } \psi})$ ; ce qui donne le résultat.

## 10 . – Théorème de décomposition : unicité de la taille des blocs

Il faut remarquer que pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\delta_k(u)$  est précisément le nombre de blocs de taille  $k$  dans l'écriture de la matrice de  $u$  par blocs de Jordan<sup>5</sup>

### V Version graduée du théorème de décomposition

## 11 . – Propriétés de $h$

a) Puisque  $h^N = \text{Id}_V$ , le polynôme  $X^N - 1$  est annulateur de  $h$ . Or ce polynôme est simplement scindé dans  $\mathbb{C}[X]$ ; donc  $h$  est diagonalisable.

b)

$$\begin{aligned} \forall v \in V_j, \quad h(u(v)) - \zeta^{j+1}u(v) &= \zeta u(h(v)) - \zeta^{j+1}u(v) \\ &= \zeta u(\zeta^j v) - \zeta^{j+1}u(v) \\ &= 0; \end{aligned}$$

ce qui prouve que

$$u(V_j) \subset V_{j+1}.$$

c) Faisons l'hypothèse que  $h^k \circ u \circ h^{-k} = \zeta^k u$ .

Celle-ci est vérifiée pour  $k = 1$ .

Si elle est vérifiée pour  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned} h^{k+1} \circ u \circ h^{-k-1} &= h^k \circ h \circ u \circ h^{-1} \circ h^{-k} \\ &= h^k \circ \zeta u \circ h^{-k} \\ &= \zeta h^k \circ u \circ h^{-k} \\ &= \zeta \zeta^k u \\ &= \zeta^{k+1} u; \end{aligned}$$

ce qui établit le résultat par récurrence.

Par ailleurs :

$$\begin{aligned} h \circ u^\ell \circ h^{-1} &= (h \circ u \circ h^{-1})^\ell \\ &= (\zeta u)^\ell \\ &= \zeta^\ell u^\ell. \end{aligned}$$

---

5. Toujours pas l'amant de la princesse.

## 12 . – Recherche d'un supplémentaire stable

a)

$$\begin{aligned} \forall w \in W, \quad u(p(w)) &= u(w) \\ &= p(u(w)) ; \end{aligned}$$

puisque  $u(w) \in W$ .

$$\begin{aligned} \forall w \in W_0, \quad p(u(w)) &= p(0) \\ &= 0 \\ &= u(0) \\ &= u(p(w)) . \end{aligned}$$

Puisque  $V = W \oplus W_0$ , ce qui précède prouve que

$$p \circ u = u \circ p .$$

b) Puisque  $W$  est  $h$ -stable et de dimension finie, et  $h$  est un automorphisme,  $h(W) = W$  si bien que  $W$  est  $h^{-1}$ -stable.

Il en résulte immédiatement que  $\text{Im } \bar{p} \subset W$ .

Enfin, comme  $W$  est  $h$ -stable (donc évidemment  $h^k$ -stable,) :

$$\begin{aligned} \forall w \in W, \quad \bar{p}(w) &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} h^k \circ p \circ h^{-k}(w) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} h^k \circ h^{-k}(w) \\ &= w ; \end{aligned}$$

*i.e.*

$$\bar{p}|_W = \text{Id}_W .$$

c) Pour tout  $w \in W$

$$\bar{p}(w) = 0 \Rightarrow w = 0 ;$$

si bien que  $\text{Im } \bar{p} \cap \text{Ker } \bar{p} = 0$  ; ce qui entraîne (théorème du rang)  $V$  étant de dimension finie

$$V = \text{Im } \bar{p} \oplus \text{Ker } \bar{p} .$$

Comme par ailleurs  $\bar{p}|_{\text{Im } \bar{p}} = \text{Id}_{\bar{p}}$ ,  $\bar{p}$  est bien un projecteur.

d)

$$\begin{aligned} \bar{p} \circ u &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} h^k \circ p \circ h^{-k} \circ u \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} h^k \circ p \circ (\zeta^{-k} u \circ h^{-k}) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \zeta^{-k} h^k \circ u \circ p \circ h^{-k} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \zeta^{-k} \zeta^k u \circ h^k \circ p \circ h^{-k} \\ &= u \circ \bar{p} . \end{aligned}$$

Ainsi

$$\bar{p} \circ u = u \circ \bar{p}.$$

Par ailleurs, en se souvenant que  $h^N = \text{Id}_V$  ; ce qui entraîne que

$$\forall k \in \mathbb{Z}, h^{N+k} = h^k,$$

on a :

$$\begin{aligned} \bar{p} \circ h &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} h^k \circ p \circ h^{-k+1} \\ &= h \circ \left( \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} h^{k-1} \circ p \circ h^{-(k-1)} \right) \\ &= h \circ \bar{p}; \end{aligned}$$

si bien que

$$\bar{p} \circ h = h \circ \bar{p}.$$

e) On a déjà montré que

$$V = \text{Ker } \bar{p} \oplus W.$$

$$\begin{aligned} \forall v \in \text{Ker } \bar{p}, \quad \bar{p}(u(v)) &= u(\bar{p}(v)) \\ &= u(0) \\ &= 0; \\ \Rightarrow \quad u(v) &\in \text{Ker } \bar{p}; \\ \text{et} \quad \bar{p}(h(v)) &= h(\bar{p}(v)) \\ &= h(0) \\ &= 0; \\ \Rightarrow \quad h(v) &\in \text{Ker } \bar{p} \end{aligned}$$

### 13 . – Version « graduée » du théorème de décomposition

a) On a vu à la question 11 que  $h$  est diagonalisable ; c'est-à-dire que

$$V = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(h)} \text{Ker}(h - \lambda \text{Id}).$$

Ainsi

$$\forall \lambda \in \text{Sp}(h), u^{n-1}|_{\text{Ker}(h-\lambda \text{Id})} = 0 \Rightarrow u^{n-1} = 0.$$

Ceci contredisant l'hypothèse faite sur l'indice  $n$  de  $u$ ,

$$\exists \lambda \in \text{Sp}(h), \exists v \in \text{Ker}(h - \text{Id}), u^{n-1}(v) \neq 0.$$

b) Considérons le sous-espace  $W$   $u$ -engendré par le vecteur  $v$  donné au point précédent et suivant le procédé de la question 8. On sait alors que la matrice de  $u|_W$  est le bloc de Jordan<sup>6</sup>  $J_n$ .

Par construction  $v$  est un vecteur propre de  $h$ . Il existe donc  $\lambda \in \text{Sp}(h)$  tel que  $h(v) = \lambda v$ . Or  $X^N - 1$  est annulateur de  $h$ ; si bien qu'il existe  $a \in \mathbb{N}$  tel que  $\lambda = \zeta^a$ . Ainsi

$$h(v) = \zeta^a v.$$

En utilisant les résultats de la question 11, on a :

$$\begin{aligned} \forall 1 \leq i \leq n-1, \quad h(u^i(v)) &= \zeta^i u^i(h(v)) \\ &= \zeta^i u^i(\zeta^a v) \\ &= \zeta^{a+i} u^i(v); \end{aligned}$$

Ce qui prouve que la matrice de  $h$  dans la base  $\mathcal{B}$  est bien

$$\text{diag}(\zeta^a, \dots, \zeta^{a+n-1}).$$

On a montré à la question 12 que  $W$  possède un supplémentaire  $Z$  à la fois  $u$ -stable et  $h$ -stable. Puisque  $v \neq 0$

$$\dim Z < \dim V;$$

ce qui peut permettre d'établir le résultat par récurrence, comme à la question 9, pour peu toute fois qu'on vérifie que  $u|_Z$  et  $h|_Z$  satisfont :

- $u|_Z$  est nilpotent (d'indice éventuellement  $\leq n$ );
- $h|_Z^N = \text{Id}$  ce qui découle immédiatement de ce que  $h^N = \text{Id}$ ;
- $h|_Z \circ u|_Z \circ h|_Z^{-1} = \zeta u$ ; résulte également immédiatement de ce que  $h \circ u \circ h^{-1} = \zeta u$ .

## 14 . — Un exemple

a) On a montré à la question 11 que

$$\forall j \in \mathbb{N}, u(V_j) \subset V_{j+1};$$

Il s'ensuit que

$$\forall j \in \mathbb{N}, j \geq 1 \Rightarrow u^3(V_j) \subset V_0 = 0.$$

Comme  $V = V_1 \oplus V_2 \oplus V_3$ ,

$$u^3 = 0.$$

b) La question n'est pas claire du tout.

## VI Classification des couples de matrices rectangulaires

## 15 . — Une réduction

L'équivalence entre (i) et (ii) est la formule de changement de base pour les applications linéaires. c

L'équivalence entre (ii) et (iii) est un produit de matrices par blocs.

---

6. Zut toujours pas l'amant de la princesse.

## 16 . – Deux applications linéaires : décomposition

a) —  $H^2 = \text{Id}_{m+n}$  .

—

$$\begin{aligned} H M H^{-1} &= H M H \\ &= \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ 0 & -I_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & B \\ A & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ 0 & -I_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & B \\ -A & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ 0 & -I_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -B \\ -A & 0 \end{pmatrix} \\ &= -M . \end{aligned}$$

— Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \forall k \in \mathbb{N}, \quad H M^k H^{-1} &= (H M H^{-1})^k \\ &= (-M)^k \\ &= (-1)^k M^k . \end{aligned}$$

— Il s'ensuit que

$$\forall P \in \mathbb{C}[X], \quad H P(M) H^{-1} = P(-M) .$$

b) Soit  $\lambda$  une valeur propre de  $M$  et  $V_\lambda$  l'espace propre correspondant. Alors  $\lambda$  est valeur propre de  $H M H^{-1}$  et l'espace propre associé est  $H V_\lambda$  . Il s'ensuit que  $H V_\lambda$  est l'espace propre associé à  $\lambda$  pour  $-M$  ; autrement dit l'espace propre associé à  $-\lambda$  pour  $M$  .

c) D'après le théorème de Cayley-Hamilton  $V = \text{Ker } \chi_M(M)$  . Les polynômes  $X^r$  et  $Q$  sont premiers entre eux ; le lemme des noyaux assure donc que

$$V = \text{Ker } M^r \oplus \text{Ker } Q(M) .$$

$$\begin{aligned} \forall v \in \text{Ker } M^r, \quad M^r H v &= H^2 M^r H v \\ &= H (-M)^r v \\ &= (-1)^r H M^r v \\ &= 0 ; \end{aligned}$$

si bien que  $\text{Ker } M^r$  est  $H$ -stable.

Remarquons que  $M$  et  $-M$  étant conjuguées  $\chi_M = \chi_{-M}$  ; ce qui permet de montrer que  $\text{Ker } Q(M)$  est également  $H$ -stable.

## 17 . – Deux applications linéaires : cas nilpotent